

תוכן העניינים:

2	חשבון דיפרנציאלי
2	פונקציה רציונאלית
2	מבוא לפונקציה רציונאלית :
2	סיכום כללי :
2	שאלות :
3	תשובות סופיות :
4	הנגזרת של פונקציה רציונאלית :
4	סיכום כללי :
4	שאלות :
5	תשובות סופיות :
6	משיקים לפונקציות רציונאליות :
6	סיכום כללי :
6	שאלות :
8	תשובות סופיות :
9	חקירה של פונקציות רציונאליות :
9	סיכום כללי :
10	שאלות :
13	תשובות סופיות :
14	שאלות עם פרמטרים :
14	שאלות :
14	תשובות סופיות :

חשבון דיפרנציאלי פונקציה רציונאלית

מבוא לפונקציה רציונאלית:

סיכום כללי:

פונקציה רציונאלית:

פונקציה רציונאלית מורכבת ממנה של שני ביטויים פולינומיים. בפועל, נעסוק בפונקציות רציונאליות שבהן המכנה הוא x בלבד כגון:

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad f(x) = -\frac{4}{x}, \quad f(x) = 1 + \frac{3}{x}, \quad f(x) = x - \frac{4}{3x}$$

תחום ההגדרה של פונקציות רציונאליות:

כדי למצוא את תחום ההגדרה של פונקציה רציונאלית יש למצוא את ערכי ה- x שמאפסים את המכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$ בנקודה שבהן: $x = 3, 1, -\frac{1}{2}, -4$.

(2) כתוב את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x) = -\frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{7}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ד. $f(x) = \frac{5}{x-3}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ו. $f(x) = \frac{6}{x^2-3x+2}$

3 פשט את הפונקציות הבאות ע"י פירוק המונה :

א. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 8}{x}$

ב. $f(x) = \frac{3 - 4x + x^2}{x}$

4 מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות הבאות עם ציר ה- x .

א. $f(x) = \frac{1}{x} - 3$

ב. $f(x) = \frac{4}{x-2}$

ג. $f(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{x}$

ד. $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$

תשובות סופיות:

1 $f(3) = \frac{2}{3}$, $f(1) = 2$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, $f(-4) = -\frac{1}{2}$

2 סעיפים א-ג: $x \neq 0$, ד. $x \neq 3$, ה. $x \neq -2$, ו. $x \neq 1, 2$

3 א. $f(x) = x + 3 - \frac{8}{x}$, ב. $f(x) = \frac{3}{x} - 4 + x$

4 א. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, ב. אין חיתוך , ג. $(1, 0)$, $(9, 0)$, ד. $(1, 0)$

הנגזרת של פונקציה רציונאלית:

סיכום כללי:

כלל הגזירה:

$$\text{הנגזרת של הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x} \text{ היא: } f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

שלבים לגזירה מקוצרת:

ביצוע הגזירה של פונקציה עם מקדם: $f(x) = \frac{a}{x}$ (כאשר a פרמטר) בשלושה שלבים:

- 1) הופכים את סימן הביטוי
- 2) משאירים את המספר a במונה כפי שהוא.
- 3) מעלים את x בריבוע.

הערה:

בפונקציות המורכבות ממספר מחוברים במונה, נפעל ע"י סידור תחילה (נכתוב כל מחובר עם המונה בנפרד) ואז נבצע את הגזירה איבר-איבר.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{1}{x}$

ד. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

ז. $f(x) = \frac{2}{3x}$

י. $f(x) = x^2 - \frac{5}{x}$

ב. $f(x) = \frac{6}{x}$

ה. $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

ח. $f(x) = \frac{1}{4x}$

יא. $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x}$

ג. $f(x) = -\frac{3}{x}$

ו. $f(x) = \frac{7}{x} - \frac{x}{7}$

ט. $f(x) = -\frac{5}{3x}$

יב. $f(x) = x^2 + 4x - \frac{4}{x}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

ב. $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

ד. $f(x) = \frac{(x+5)^2}{x}$

א. $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$

ג. $f(x) = \frac{2x-3}{x}$

תשובות סופיות:

$f'(x) = \frac{3}{x^2}$.ג	$f'(x) = -\frac{6}{x^2}$.ב	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.א (1)
$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{1}{7}$.ו	$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.ה	$f'(x) = \frac{1}{x^2}$.ד
$f'(x) = \frac{5}{3x^2}$.ט	$f'(x) = -\frac{1}{4x^2}$.ח	$f'(x) = -\frac{2}{3x^2}$.ז
$f'(x) = 2x + 4 + \frac{4}{x^2}$.יב	$f'(x) = \frac{2x}{3} - \frac{3}{x^2}$.יא	$f'(x) = 2x + \frac{5}{x^2}$.י
$f'(x) = \frac{3}{x^2}$.ג	$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.ב	$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$.א (2)
		$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$.ד

משיקים לפונקציות רציונאליות:

סיכום כללי:

תזכורות:

- נגזרת של פונקציה בנקודה מסוימת תיתן את שיפוע הפונקציה, או שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה זו.
- נכתוב משוואת משיק ע"י שימוש בנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

שאלות עם מציאת ערך הנגזרת ושיפוע הפונקציה בנקודה:

(1) נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{x}$.

א. מהי נגזרת הפונקציה?

ב. מהו ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = 2$ ובנקודה שבה $x = -\frac{1}{2}$?

(2) מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = -\frac{6}{x}$ בנקודה שבה $x = 1$?

(3) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+2}{x} - \frac{1}{3}x$.

א. מהי נגזרת הפונקציה?

ב. מה הוא שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$?

(4) נתונה הפונקציה: $y = \frac{3}{4x} - \frac{x}{12}$.

א. מהי נגזרת הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. מצא את שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

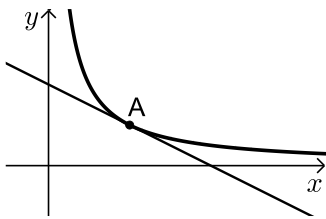
שאלות עם מציאת נקודה לפי שיפוע:

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{x}$.

- א. באלו נקודות שיפוע הפונקציה הוא -4?
 ב. באלו נקודות מתקיים: $f'(x) = -1$?

(6) לגרף פונקציה: $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{8}{x}$ מעבירים משיקים ששיפועם הוא 1. מצא את שיעורי נקודות ההשקה.

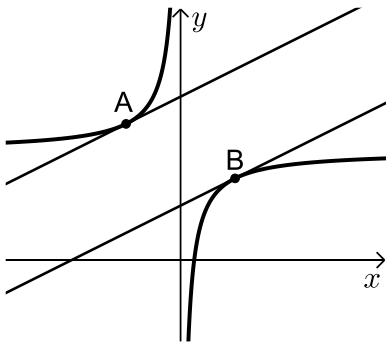
שאלות עם מציאת משוואת משיק לפי שיפוע ונקודה:



(7) מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x}$ בנקודה A

שבה $x = 2$ כמתואר באיור.

- א. כתוב את שיעורי הנקודה A.
 ב. כתוב את נגזרת הפונקציה.
 ג. מצא את משוואת המשיק.



(8) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4 - \frac{2}{x}$.

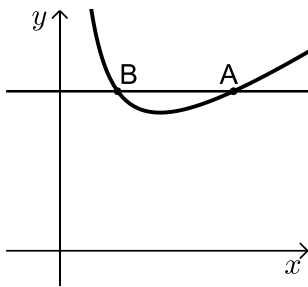
העבירו שני משיקים לפונקציה בנקודה A ובנקודה B

(A משמאל ל-B). שיפוע כל אחד מהמשיקים הוא $\frac{1}{2}$.

מצא את משוואות המשיקים.

(9) לגרף הפונקציה: $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x}$ מעבירים משיק בנקודה $x = 2$.

- א. מצא את נקודת ההשקה.
 ב. כתוב את משוואת המשיק.



10 נתונה הפונקציה: $y = 3x + \frac{1}{x}$ בתחום $x > 0$.

הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה בנקודות A ו-B (משמאל ל-A). מעבירים משיקים לגרף הפונקציה דרך הנקודות A ו-B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה

העוברים דרך הנקודות A ו-B.

ג. המשיקים שאת משוואותיהם מצאת בסעיף הקודם חותכים זה את זה בנקודה K. מצא את שיעורי הנקודה K.

תשובות סופיות:

1 א. $y' = -\frac{1}{x^2}$

2 $m = 6$

3 א. $y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3}$

4 א. $y' = -\frac{3}{4x^2} - \frac{1}{12}$

5 א. $(1, 4)$, $(-1, -4)$

6 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

7 א. $A(2, 1)$

8 $y = \frac{1}{2}x + 6$, $y = \frac{1}{2}x + 2$

9 א. $(2, 0)$

10 א. $A(1, 4)$, $B\left(\frac{1}{3}, 4\right)$

ב. $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$, $y'(2) = -\frac{1}{4}$

ב. $m = -\frac{5}{6}$

ב. $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ג. $m = -\frac{1}{6}$

ב. $(2, 2)$, $(-2, -2)$

ב. $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

ג. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ב. $y = -x + 2$

ב. $y = 2x + 2$, $y = -6x + 6$ ג. $K\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

חקירה של פונקציות רציונאליות:

סיכום כללי:

שלבי חקירה של פונקציה (כל פונקציה, לאו דווקא רציונאלית):

- (1) מציאת תחום ההגדרה.
- (2) מציאת נקודות הקיצון וקביעת סוגן.
- (3) כתיבת תחומי העלייה והירידה.
- (4) מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- (5) סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

הערות:

- בשאלות שונות נקבל סעיפי חקירה חלקיים או מלאים (תלוי בשאלה) ולעיתים ייתכן גם שילוב של חקירה חלקית ושימוש במשיקים.
- בשאלות מסוימות לא נידרש לצייר סקיצה של גרף הפונקציה אלא לבחור סקיצה נכונה מבין מספר אפשרויות. במקרים אלו נבחן את תוצאות סעיפי החקירה ונאתר את הסקיצה הנכונה.

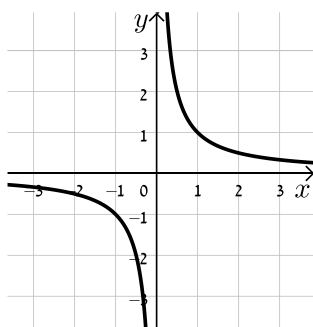
אסימפטוטה לגרף הפונקציה:

אסימפטוטה היא ישר (יכול להיות אופקי, אנכי ואפילו משופע) שגרף הפונקציה שואף אליו אבל לעולם לא ייגע בו.

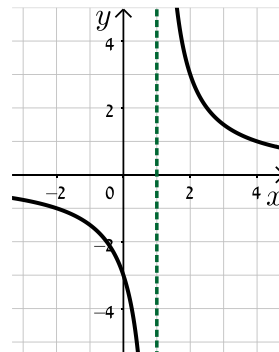
בפונקציות שלנו נעסוק אך ורק באסימפטוטה אנכית. כדי למצוא את משוואת הישר של אסימפטוטה אנכית נאפס את המכנה.

דוגמאות לאסימפטוטות אנכיות:

$$f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow x=0$$



$$f(x) = \frac{3}{x-1} \rightarrow x=1$$



שאלות:

שאלות עם מציאת נקודות מקסימום ומינימום:

(1) נתונה הפונקציה: $y = x + \frac{4}{x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 9 - x - \frac{9}{x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$.
 ג. מסמנים ב-A את נקודת המקסימום של הפונקציה, וב-B את נקודת המינימום שלה. כתוב את שיעורי הנקודות A ו-B.

(3) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות (במידה וישנן) וקבע את סוגן:

א. $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{x}{3}$.

ב. $f(x) = \frac{1}{4x} + x$.

ג. $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 9}{x}$.

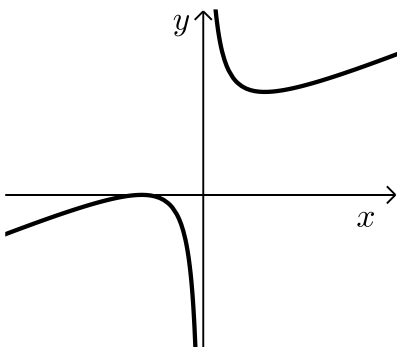
(4) הראה כי לפונקציה: $f(x) = 5x - \frac{5}{x}$ אין נקודות קיצון כלל.

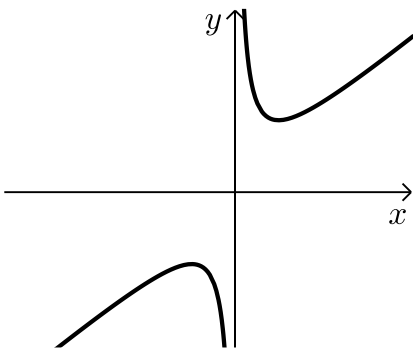
שאלות כלליות המשלבות חקירה חלקית ומלאה:

(5) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x + 6 + \frac{9}{x}$.

מצא את:

- א. (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (2) האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
 ב. נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה (הסתמך על האיור הנתון).
 ג. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.





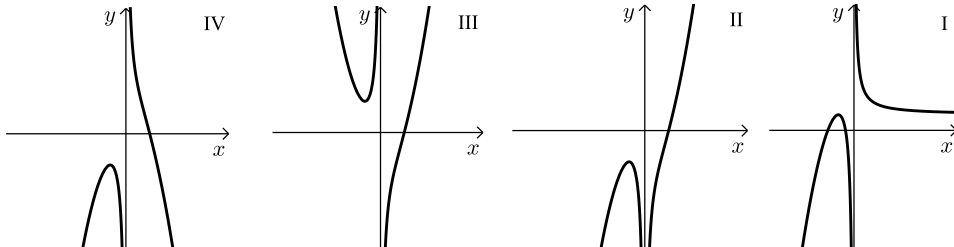
6 לפניך גרף הפונקציה: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן בהסתמך על הגרף.
 בנקודה שבה $x = 4$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

- ג. (1) מצא את שיפוע המשיק.
 (2) מצא את משוואת המשיק.
 ד. (1) מצא את משוואת המשיק לגרף פונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
 (2) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של שני המשיקים שמצאת.

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 - x^2 + \frac{2}{x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
 ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגה.
 ג. קבע אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת עבור $x > 0$. נמק.
 ד. אחד מארבעת הגרפים שבסוף השאלה I, II, III, IV הוא גרף הפונקציה $f(x)$. ציין מי הוא ונמק.



8 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{x} + 12x - 2$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ד. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה מסוימת ברביע הראשון. שיפוע המשיק שהעבירו הוא 9.
- (1) מצא את שיעורי נקודת ההשקה של המשיק.
- (2) מצא את משוואת המשיק.

9 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} - 3x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
- ב. (1) הראה שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ג. הראה כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.
- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.
- ד. מצא את משוואת המשיק.
- ה. מצא את נקודת החיתוך של המשיק שמצאת עם הישר $y = 8$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \neq 0$ ב. $\max(-2, -4)$, $\min(2, 4)$
- (2) א. $x \neq 0$ ב. $(-3, 15)$, $(3, 3)$ ג. $A(3, 3)$, $B(-3, 15)$
- (3) א. אין נקודות קיצון כלל. ב. $\min\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\max\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$
- (4) ג. $\min(3, 14)$, $\max(-3, 2)$ הוכחה.
- (5) א. $x \neq 0$ (1) א. $x = 0$ (2) ב. $\min(3, 12)$, $\max(-3, 0)$ ג. $(-3, 0)$
- (6) א. $x \neq 0$ ב. $\min(2, 8)$, $\max(-2, -8)$ ג. $m = 1.5$ (1) ד. $(-8, -8)$ (2)
- (7) א. $x \neq 0$ ב. $\max(-1, -2)$ ג. הפונקציה יורדת. ד. גרף I
- (8) א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2}, 10\right)$, $\max\left(-\frac{1}{2}, -14\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < -\frac{1}{2}$, יורדת: $0 < x < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$
- (9) א. $x \neq 0$ ב. (1) הוכחה. ב. (2) הפונקציה יורדת בכל ת.ה. ד. $(1, 13)$ (1) ד. $y = 9x + 4$ (2) ג. הוכחה. ד. $y = -6x + 2$ ה. $(-1, 8)$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

- (1) לפונקציה $f(x) = ax - \frac{12}{x}$ יש נקודת מקסימום כאשר $x = 2$.
 א. מצא את ערכו של הפרמטר a .
 ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן וקבע את סוגן.
- (2) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^2 + \frac{b}{x}$, b הוא פרמטר.
 א. מצא את ערכו של b אם ידוע כי: $f'(-1) = -12$.
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- (3) לפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{4} + \frac{A}{x}$ יש נקודת מינימום בנקודה שבה $x = 2$.
 א. מצא את ערכו של הפרמטר A .
 ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

תשובות סופיות:

- (1) א. $a = -3$ ב. $\min(-2, 0)$
- (2) א. $b = 6$ ב. $\min(1, 9)$
- (3) א. $A = 1$ ב. $\min\left(2, \frac{3}{4}\right), \max\left(-2, -1\frac{1}{4}\right)$